3. Soit a un nombre réel. L'équation de la tangente à la parabole au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$, avec $f(a) = a^2$ et $f'(a) = 2a$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} & y = f'(a)(x-a)+f(a) \\ \iff & y = 2a(x-a)+a^2 \\ \iff & y = 2ax-2a^2+a^2 \\ \iff & y = 2ax-a^2 \end{aligned}$$

On appelle $(x;y)$ les coordonnées du point A (par lequel doivent passer les tangentes).

Chaque valeur différente de a donne une tangente différente, donc pour chercher le nombre de tangentes, on cherche le nombre de valeurs possibles de a, c'est-à-dire le nombre de solutions de l'équation précédente, avec x et y fixés (les coordonnées du point A). Cette équation peut être mise sous la forme :

$$\begin{aligned} & y = 2ax-a^2 \\ \iff & 0 = 2ax-a^2-y \\ \iff & 0 = -a^2+2xa-y \end{aligned}$$

C'est un polynôme du second degré, de discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= (2x)^2 - 4\times(-1)\times(-y) \\ &= 4x^2-4y \\ &= 4\left(x^2-y\right) \end{aligned}$$

Trois cas sont alors possibles.

Premier cas : $\Delta < 0$, et le trinôme n'a aucune solutions, donc il n'y a aucune valeur de a possible, donc il n'existe aucune tangente qui passe par le point A. Cela correspond à :

$$\begin{aligned} & \Delta < 0 \\ \iff & 4\left(x^2 - y\right) < 0 \\ \iff & x^2 - y < 0 \\ \iff & x^2 < y \end{aligned}$$

En d'autres termes, le point A est au dessus de la parabole (voir le schéma plus bas).

Deuxième cas : $\Delta = 0$, et le trinôme a une seule solution, donc il y a une unique valeur de a possible, donc il existe une seule tangente qui passe par le point A. Cela correspond à :

$$\begin{aligned} & \Delta = 0 \\ \iff & 4\left(x^2 - y\right) = 0 \\ \iff & x^2 - y = 0 \\ \iff & x^2 = y \end{aligned}$$

En d'autres termes, le point A est sur la parabole.

Troisième cas : $\Delta > 0$, et le trinôme a deux solutions, donc il y a deux valeurs de a possibles, donc il existe deux tangentes qui passent par le point A. Cela correspond à :

$$\begin{aligned} & \Delta > 0 \\ \iff & 4\left(x^2 - y\right) > 0 \\ \iff & x^2 - y > 0 \\ \iff & x^2 > y \end{aligned}$$

En d'autres termes, le point A est en dessous de la parabole.

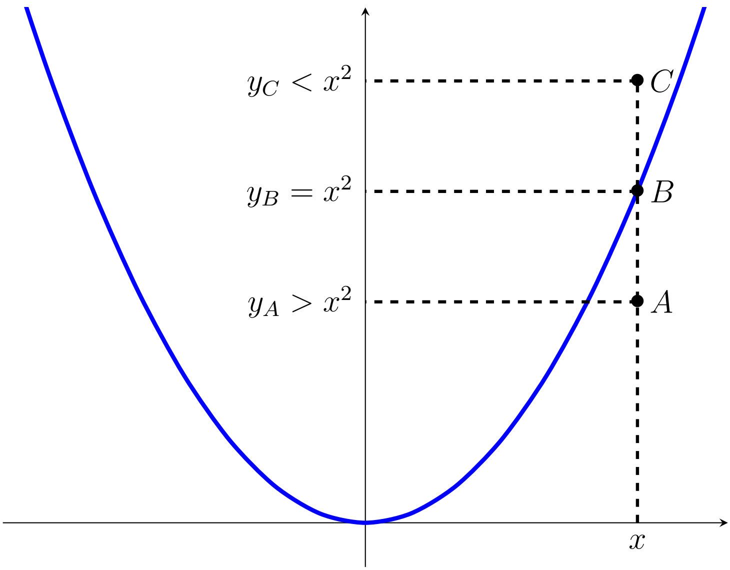
Si l'on reformule ces trois cas, mais « du point de vue » de A, cela donne :

— si le point A est au dessus de la parabole, aucune tangente ne passe par A ;

— si le point A est un point de la parabole, une seule tangente passe par A ;

— si le point A est en dessous de la parabole, une deux tangentes passent par A.

Remarque. Illustration de la position d'un point par rapport à la parabole en fonction de ses coordonnées



Pour une même abscisse x :

(a) le point B est sur la parabole : son ordonnée y_B est égale à x^2 ;

(b) le point A est en dessous de la parabole : son ordonnée y_A est inférieure à x^2 : $y_A < x^2$;

(c) le point C est au dessus de la parabole : son ordonnée y_C est inférieure à x^2 : $y_C > x^2$.