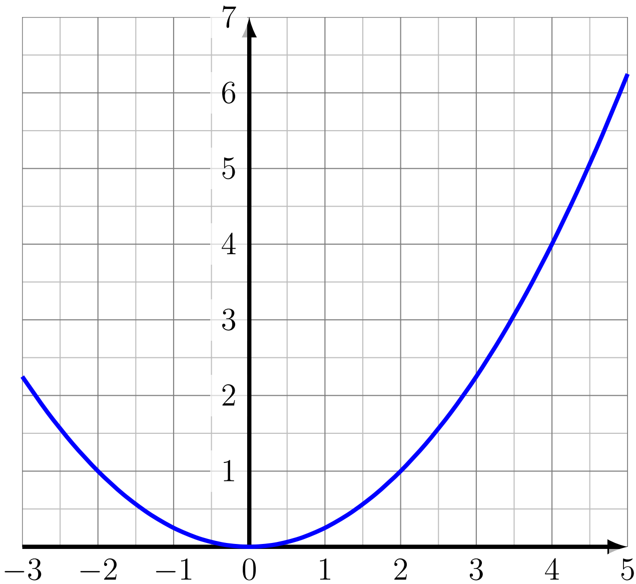
Méthode d'Euler

On appelle *équation différentielle* une équation mettant en œuvre une ou plusieurs *fonctions* inconnues et leurs dérivées. Par exemple, trouver les fonctions f telles que $f'(x) + 2f(x) = 0$. Ce genre d'équations sera étudié l'an prochain.
La *méthode d'Euler* permet de trouver une solution approchée de certaines de ces équations.

Exercice 1 (Expérimentations, et Calculs théoriques)**.**



1. On a tracé ci-dessus la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{4}$.
   (a) Dériver la fonction f.
   (b) Calculer $f'(2)$, puis tracer la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -2.
   (c) Que peut-on dire de la courbe de f, et de sa tangente, pour des abscisses très proches de -2 ?
2. On cherche à résoudre de manière approchimative l'équation différentielle :

$$\begin{cases} 2f(x) - xf'(x) = 0 \\ f(-2) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

(a) Isoler $f'(x)$ dans l'équation 1.
(b) Placer le point de coordonnées $(-2; f(-2))$.
(c) En utilisant l'équation 1, calculer $f'(-2)$, puis tracer le segment de la droite passant par le point de coordonnées $(-2; f(-2))$, et de coefficient directeur $f'(-2)$, pour $x \in [-2; -1]$.

Puisque la courbe de la fonction et sa tangente sont très proches pour des abscisses proches de 2, on suppose ici que la tangente correspond *exactement* à la courbe de la fonction. C'est une approximation, fausse, mais cela nous permettra d'obtenir une solution *approchée* de l'équation différentielle.

(d) En supposant que le « morceau » de tangente que nous avons tracé est la courbe de f, lire graphiquement la valeur de $f(3)$.
(e) Répéter les questions 2c et 2d à partir d'une abscisse $x = -1$.
(f) Répéter les mêmes questions pour les abscisses $x = 0$, puis $x = 1$, et ainsi de suite jusqu'à $x = 4$ (on remarque alors que la question 2d est inutile).

3. *Précision de la solution.*
   (a) Vérifier par le calcul que la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{4}$ est une solution de l'équation 1.
   (b) Comparer la courbe tracée à cette question, et la courbe de la fonction f. Comment faire pour améliorer la précision du tracé ?
4. *Généralisation.* Soit f une fonction dérivable, et a un réel de son ensemble de définition. On suppose que pour des valeurs de h suffisament petites, $f(a+h)$ est exactement égale à l'image de $a+h$ par la tangente à f en a.
   (a) Rappeler l'équation de la tangente à f au point d'abscisse a.
   (b) En déduire l'expression de $f(a+h)$ en fonction de $f(a)$, $f'(a)$ et h.

Exercice 2 (Mise en œuvre informatique).

1. *Exemple (fait avec le professeur).* Télécharger le fichier `exo-euler-exemple.py`, ouvrez-le avec le logiciel Thonny, complétez-le (remplacez les `???` par les bonnes formules), puis exécutez-le. Une approximation de la courbe de la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{4}$ (solution de l'équation différentielle 1) devrait s'afficher à l'écran.
2. *Cinétique chimique.* La réaction de l'oxydation du sulfite de cuivre peut être modélisée par les équations suivantes.

$$\begin{cases} A & \longrightarrow & B & \text{Réaction lente} \\ B+B & \longrightarrow & C+B & \text{Réaction très rapide} \\ B+C & \longrightarrow & A+C & \text{Réaction rapide} \end{cases}$$

   On appelle a, b et c les quantités (en unité arbitraire) des composants A, B et C au cours du temps : $a(0)$ est la quantité de A initiale ; $b(3)$ est la quantité de B au bout de trois secondes, etc. Ces fonctions a, b, c vérifient le système d'équations différentielles suivant (avec $k_1 = 0,04$, $k_2 = 3$, $k_3 = 0,1$) :

$$\begin{cases} a(0) = 1 \,;\, b(0) = 0 \,;\, c(0) = 0 \\ a'(t) = -k_1 a(t) + k_3 b(t) c(t) \\ b'(t) = k_1 a(t) - k_3 b(t) c(t) - k_2 b(t)^2 \\ c'(t) = k_2 b(t)^2 \end{cases}$$

   Copiez dans votre répertoire personnel le fichier `exo-euler-chute.py`. Ouvrez-le avec le logiciel Thonny, complétez les trous (remplacez les `???` par les bonnes formules), puis exécutez le fichier pour tracer (une approximation de) la représentation graphique des fonctions a, b et c.

   Appelez le professeur pour vérifier votre travail.
3. *Chute libre.* En mécanique, deuxième loi de Newton (ou « principe fondamental de la dynamique ») donne la relation entre l'accélération d'un corps de masse m et les forces extérieures s'appliquant à ce corps :

$$\sum \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$$

   Un mobile en chute libre n'est soumis qu'à la gravité, qui s'exprime comme $m\overrightarrow{g}$ (où $\overrightarrow{g}$ est un vecteur vertical, orienté vers le bas, de norme g, intensité de la pesanteur).

Par définition, l'accélération $\overrightarrow{a}$ d'un mobile est égale à la dérivée de sa vitesse $\overrightarrow{v}$, elle même égale à la dérivée de sa position $\overrightarrow{r}$. L'équation différentielle vérifiée par la position $\overrightarrow{r}$ est donc : $m\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} = -mg\overrightarrow{z}$ (où $\frac{d^2 f}{dt^2}$ est la notation « physicienne » pour $f''(t)$, la dérivée seconde de f). Cela donne, en décomposant selon deux coordonnées (on se place dans un plan vertical) :

$$\begin{cases} x\left(0\right)=0\,;\, z\left(0\right)=0 \\ x'\left(0\right)=10\,;\, z'\left(0\right)=10 \\ mx''\left(t\right) \;=\; 0 \\ mz''\left(t\right) \;=\; -mg \end{cases}$$

Copiez dans votre répertoire personnel le fichier `exo-euler-chute.py`. Ouvrez-le avec le logiciel Thonny, complétez les trous (remplacez les `???` par les bonnes formules), puis exécutez le fichier.

Appelez le professeur pour vérifier votre travail.

4. Répondre aux questions suivantes, dans l'ordre de votre choix.
   (a) Dans la question 3 (chute libre), ajouter un des paramètres suivants : (i) le rebond du mobile, quand il atteint le sol en $z = 0$; (ii) la résistance de l'air (ou le vent), dont il faudra déterminer une expression, qui applique une force horizontale à l'objet.
   (b) Utiliser cette méthode pour résoudre un autre problème, par exemple un des problèmes suivants. Pour chacun, il faudra déterminer (en étudiant le problème, ou par une recherche sur internet) une équation différentielle modélisant le problème, et appliquer la méthode d'Euler pour le résoudre.
      i. Mouvement d'une masse accrochée à un ressort. Dans un premier temps, on pourra ignorer le frottement, puis le rajouter, puis considérer un mouvement entretenu (ce qui est le cas pour un séisme). Voir par exemple : `http://fr.wikipedia.org/wiki/Système_masse-ressort`.
      ii. Étude de la taille des populations d'une proie et d'un prédateur (lions et antilopes, requins et sardines, trolls et gobelins, etc.). Voir par exemple : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Équations_de_Lotka-Volterra`.
      iii. Un autre problème de votre choix.