Chapitre 5

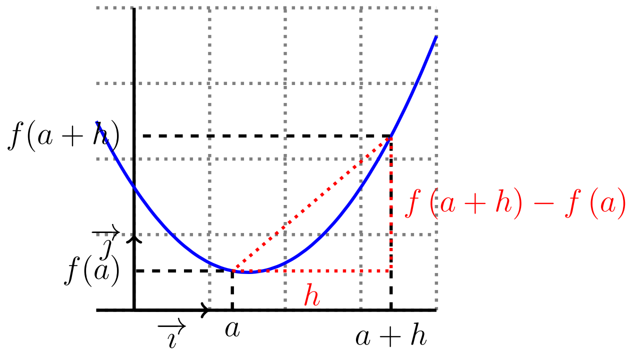
Dérivation

1 Nombre dérivé d'une fonction

Définition 1 (Taux d'accroissement)**.** Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$, et $a \in \mathcal{D}$. Pour $h \neq 0$, $a + h \in \mathcal{D}$, on appelle taux d'accroissement le rapport :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Remarque 2. Le taux d'accroissement est la pente de la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(a + h, f(a + h))$.



Définition 3 (Nombre dérivé)**.** Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$, et $a \in \mathcal{D}$. S'il existe l tel que la limite de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tende vers l quand h tend vers 0, alors :

- on dit que f est *dérivable* en a ;
- on note $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+x)-f(a)}{h} = l$;
- $l = f'(a)$ est appelé *nombre dérivé de f en a.*

Propriété 4 (Interprétation géométrique)**.** Si une fonction f est dérivable en a, alors $f'(a)$ est la pente de la tangente à la courbe de f en $(a, f(a))$.

2 Tangente

Définition 5 (Tangente)**.** Soient I un intervalle, $a \in I$, f une fonction définie sur I, dérivables en a, et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f. La droite passant par le point $(a, f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée *tangente à* $\mathcal{C}_f$ *au point d'abscisse* a.

Remarque 6. Visuellement, cette définition correspond à la définition déjà connue d'une tangente à un cercle : la tangente à une courbe $\mathcal{C}_f$ au point de coordonnées $(a, f(a))$ est la droite passant par ce point, et ne « touchant » la courbe qu'en ce point là, dans un voisinage de ce point.

Propriété 7 (Tangente)**.** Soit f une fonction dérivable en a. L'équation de la tangente à la courbe de f en $(a, f(a))$ est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

TODO Lecture graphique ; Tracé.

3 Fonctions et opérations usuelles

Définition 8 (Dérivée d'une fonction)**.** Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$, et I un sous-ensemble de $\mathcal{D}$. On dit que f est *dérivable sur* I si f est dérivable en tout point de I.
On appelle *fonction dérivée de* f, et on note f', la fonction qui à tout point x de I associe le réel $f'(x)$, nombre dérivé de f en x.

Propriété 9 (Dérivées des fonctions usuelles)**.**

— Sur $]0;+\infty[$, la dérivée de la fonction racine $x \mapsto \sqrt{x}$ est $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

— Sur $\mathbb{R}^*$, la dérivée de la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

— Sur $\mathbb{R}$, pour n un entier relatif non nul, la dérivée de $x \mapsto x^n$ est $x \mapsto nx^{n-1}$.

Remarque 10. La dernière propriété est vraie pour tout α réel non nul, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$ (ou $x \in \mathbb{R}^*$ is $\alpha > 0$) : la dérivée de $x \mapsto x^\alpha$ est $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$. De là, on peut en déduire les deux propriétés précédentes : soient $u : x \mapsto \sqrt{x}$ et $v : x \mapsto \frac{1}{x}$. Alors, quel que soit x réel, $u(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ et $v(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, et :

$$u'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$v'(x) = -1 \times x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Corollaire 11. Sur $\mathbb{R}$:

— la dérivée d'une fonction constante (pour un k réel) $x \mapsto k$ est la fonction nulle $x \mapsto 0$;

— la dérivée d'une fonction affine $x \mapsto ax+b$ est une fonction constante $x \mapsto a$;

— la dérivée de la fonction carré $x \mapsto x^2$ est $x \mapsto 2x$.

— la dérivée de la fonction cube $x \mapsto x^3$ est $x \mapsto 3x^2$.

TODO Fonction valeur absolue non dérivable en 0.

Propriété 12 (Opérations usuelles)**.** Soient u, v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et λ un réel. Alors :

— $(\lambda u)' = \lambda u'$;

— $(u+v)' = u' + v'$ (la dérivée de la somme est la somme des dérivée) ;

— $(u \times v)' = u'v + v'u$;

— $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ (si u ne s'annule pas sur I).

— $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ (si v ne s'annule pas sur I).

— La dérivée de $x \mapsto g(ax+b)$ est $x \mapsto ag'(ax+b)$.