Exercice 1. *Tous les angles sont mesurés en radians.*
On définit sur un certain ensemble de définition (qui sera déterminé à la question 4) la fonction *tangente* (notée simplement : tan) par :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Par exemple, puisque $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, alors :

$$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

L'objet de cet exercice est d'étudier cette nouvelle fonction.
Seules les questions marquées d'une étoile ⭐ sont obligatoires. Les autres sont intéressantes, mais concernent moins le chapitre en cours.

1. ⭐ *Échauffement.* En utilisant la définition, montrez que : (a) $\tan 0 = 0$; (b) $\tan\pi = 0$; (c) $\tan\frac{\pi}{4} = 1$; (d) et que $\tan -\frac{\pi}{2}$ n'est pas défini.
2. *Vocabulaire.* Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère le cercle trigonométrique, la droite d, tangente au cercle et passant par I, et un point M sur le cercle, image d'un réel x compris dans l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.
   Le point H est le projeté orthogonal du point M sur la droite (OI), et le point T est l'intersection des droites (OM) et d.
   En utilisant le théorème de Thalès dans les triangles OMH et OTI, montrez que la distance IT est égale à $\frac{\sin x}{\cos x}$.
3. ⭐ *Représentation graphique.* Avec votre calculatrice, le logiciel Geogebra [1], ou tout autre outil de votre choix, tracez la courbe de la fonction tangente. Recopiez l'allure de la courbe (sa forme, sans être très précis) sur votre copie.
   Cette courbe pourra vous être utile pour vérifier graphiquement vos réponses aux questions suivantes.
4. ⭐ *Domaine de définition.*
   (a) Déterminez les valeurs de x pour lesquelles : $\cos x = 0$. Il y a une infinité de réponse : essayez de *toutes* les donner.
   (b) En déduire le domaine de définition de la fonction tangente, en justifiant. La réponse devrait être de la forme : *« La fonction tangente est définie sur tous les nombres réels sauf … ».*
5. *Dans un triangle.* Dans cette partie, nous allons montrer que cette fonction tangente correspond à la tangente utilisée dans les triangles au collège.
   On considère un triangle ABC, rectangle en A.
   (a) Complétez avec vos souvenirs de collège : $\sin\widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$; $\cos\widehat{ABC} = \frac{\cdots}{\cdots}$; $\tan\widehat{ABC} = \frac{\cdots}{\cdots}$.

1. Vous pouvez utiliser Geogebra en ligne sur `https://www.geogebra.org/graphing`, l'installer sur votre *smartphone* en recherchant `geogebra` dans le magasin d'application, ou l'installer sur un ordinateur librement en le téléchargeant depuis `http://www.geogebra.org`.

   (b) Simplifiez l'expression $\frac{\sin \widehat{ABC}}{\cos \widehat{ABC}}$: vous devriez obtenir : $\tan \widehat{ABC}$.

6. ⭐ *Parité.*
   (a) Calculez $\tan \frac{\pi}{4}$ et $\tan -\frac{\pi}{4}$. La fonction tangente est-elle paire ?
   (b) En justifiant à l'aide de votre cours, exprimez $\sin(-x)$ et $\cos(-x)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.
   (c) Prouvez que la fonction tangente est impaire.

7. ⭐ *Périodicité.*
   (a) En utilisant le cercle trigonométrique, expliquer (avec plus ou moins de rigueur) que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \sin(x+\pi) &= -\sin x \\ \cos(x+\pi) &= -\cos x \end{aligned}$$

   Par exemple, puisque : $\frac{3\pi}{2} = \pi + \frac{\pi}{2}$, alors : $\sin \frac{3\pi}{2} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1$.
   (b) Montrez que la fonction tangente est périodique de période π (c'est-à-dire que pour tout x de son domaine de définition, on a : $\tan(x+\pi) = \tan x$).

8. ⭐ *Signe.*
   (a) Rappelez le tableau de signes des fonctions sinus et cosinus sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$ (vu en cours).
   (b) En déduire le tableau de signes de la fonction tangente sur le même intervalle (moins les éventuelles valeurs interdites).
   (c) En utilisant le résultat de la question 7, en déduire le tableau de signes de la fonction tangente sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$ (moins les éventuelles valeurs interdites).

9. *Variations.*
   (a) *Difficile* On admet que les fonctions sinus et cosinus sont dérivables, et que :
      — la dérivée de la fonction $x \mapsto \sin x$ est $x \mapsto \cos x$;
      — la dérivée de la fonction $x \mapsto \cos x$ est $x \mapsto -\sin x$.

   On admet que la fonction tangente est dérivable sur son domaine de définitions. Montrer que la dérivée de la fonction tangente est égale à $x \mapsto 1 + \tan^2 x$ (où $\tan^2 x$ est une abréviation pour : $(\tan x)^2$).
   (b) Montrez que $1 + \tan^2 x$ est strictement positive pour tout x du domaine de définition de la fonction tangente.
   (c) En déduire les variations de la fonction tangente sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$, que l'on présentera dans un tableau de variations (en faisant attention aux valeurs interdites).