Chapitre 5

Fonctions trigonométriques

0 Rappels

Remarque 1. Oubliez les nombres pairs et impairs : les fonctions paires et impaires n'ont rien à voir avec ça !

Définition 2.

— Une fonction f est dite *paire* si pour tout x de son ensemble de définition, $f(-x) = f(x)$.

— Une fonction f est dite *impaire* si pour tout x de son ensemble de définition, $f(-x) = -f(x)$.

Propriété 3.

— La courbe représentative d'une fonction *paire* est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

— La courbe représentative d'une fonction *impaire* est symétrique par rapport à l'origine.

Exemple 4.

— La fonction carré $f : x \mapsto x^2$ est paire, mais pas impaire.

Paire Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2 \\ &= (-1)^2 \times x^2 \\ &= x^2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc $f(-x) = f(x)$: la fonction est paire.

Impaire Prenons par exemple $x = 3$. D'une part, $f(-3) = (-3)^2 = 9$. D'autre part, $-f(3) = -3^2 = -9$. Donc $f(-3) \neq -f(3)$, et la fonction n'est pas impaire.

— La fonction cube $f : x \mapsto x^3$ est impaire, mais pas paire.

Paire Prenons par exemple $x = 3$. D'une part, $f(-3) = (-3)^3 = -27$. D'autre part, $f(3) = 3^2 = 27$. Donc $f(-3) \neq f(3)$, et la fonction n'est pas paire.

Impaire Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 \\ &= (-1)^3 \times x^3 \\ &= -1 \times x^3 \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Donc $f(-x) = -f(x)$: la fonction est impaire.

Exercice (Défi — Optionnel)**.**

1. Déterminer une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui soit à la fois paire et impaire.
2. Montrer que cette fonction est l'unique fonction à la fois paire et impaire.

1 Définitions et Propriétés

Définition 5.

— La fonction *sinus* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout nombre x associe $\sin x$.

— La fonction *cosinus* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout nombre x associe $\cos x$.

Propriété 6.

— La fonction *sinus* est impaire, mais pas paire.

— La fonction *cosinus* est paire, mais pas impaire.

Propriété 7. Les fonctions *sinus* et *cosinus* sont *périodiques* de période 2π, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \text{ et } \sin(x + 2\pi) = \sin x$$

Exemple 8. On donne (ou on rappelle) :

$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ $\qquad$ $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{1}{1+\sqrt{5}}$

Déterminer, sans aucun calcul, les valeurs suivantes :
(a) $\sin -\frac{\pi}{10}$ (b) $\cos -\frac{\pi}{8}$ (c) $\cos\frac{13\pi}{6}$

(a) Puisque la fonction sinus est impaire, alors :

$$\sin -\frac{\pi}{10} = -\sin\frac{\pi}{10} = -\frac{1}{1+\sqrt{5}}$$

(b) Puisque la fonction cosinus est paire, alors :

$$\cos -\frac{\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

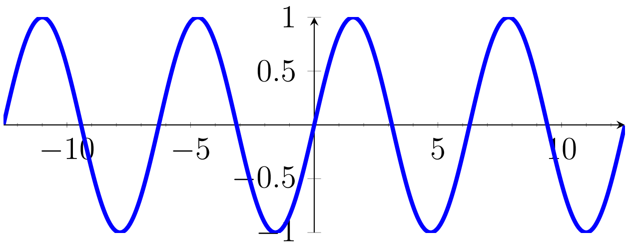
(c) Puisque la fonction cosinus est périodique de période 2π, alors :

$$\cos\frac{13\pi}{6} = \cos\left(\frac{12\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

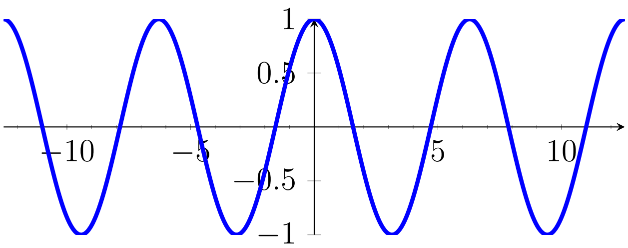
2 Représentation graphique

Définition 9. Les courbes des fonctions sinus et cosinus sont des *sinusoïdes*.

Fonction sinus



Fonction cosinus



Propriété 10.

— La courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine (car la fonction est impaire).

— La courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (car la fonction est paire).

— Les courbes des fonctions sinus et cosinus sont invariantes par translation de vecteur $2\pi\vec{\imath}$ (car les fonctions sont périodiques de période 2π).