Propriété. Soit ax^2+bx+c un polynôme du second degré (donc $a \neq 0$), de discriminant $\Delta = b^2-4ac$. Alors :

- si $\Delta < 0$, le polynôme n'a pas de racines ;
- si $\Delta = 0$, le polynôme a une racine double $x = -\frac{b}{2a}$;
- si $\Delta > 0$, le polynôme a deux racines $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Démonstration. Résolvons l'équation $ax^2+bx+c=0$. Pour commencer, nous multiplions à gauche et à droite par $4a$ (cela simplifiera les calculs plus tard) :

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= 0 \\
4a \times \left(ax^2+bx+c\right) &= 4a \times 0 \\
4a^2x^2+4abx+4ac &= 0 \\
(2ax)^2 + 2\times 2ax \times b + b^2 - b^2 + 4ac &= 0 \\
(2ax+b)^2 - b^2 + 4ac &= 0 \\
(2ax+b)^2 &= b^2-4ac \\
(2ax+b)^2 &= \Delta
\end{aligned}$$

Il y a donc trois cas possibles.

Premier cas : $\Delta < 0$ Le membre de gauche de l'équation $(2ax+b)^2 = \Delta$ est un carré, donc positif, alors que le membre de droite est un nombre strictement négatif : l'équation n'a pas de solutions.

Deuxième cas : $\Delta = 0$ L'équation devient donc $(2ax+b)=0$, donc :

$$\begin{aligned}
(2ax+b)^2 &= 0 \\
2ax+b &= 0 \\
2ax &= -b \\
x &= -\frac{b}{2a}
\end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution $x = -\frac{b}{2a}$.

Troisième cas : $\Delta > 0$ Deux cas sont alors possibles : $2ax+b = \sqrt{\Delta}$ ou $2ax+b = -\sqrt{\Delta}$.

$$\begin{aligned}
2ax+b&=\sqrt{\Delta} &\text{ ou }\quad 2ax+b&=-\sqrt{\Delta} \\
2ax&=-b+\sqrt{\Delta} &\text{ ou }\quad 2ax&=-b-\sqrt{\Delta} \\
x&=\tfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} &\text{ ou }\quad x&=\tfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}
\end{aligned}$$

□