Exercice 2. Le niveau sonore se mesure en décibels (abrégé *db*). Par exemple, le bruit d'un scooter est 90 db, et celui du décollage d'une fusée est 180 db.
On admet que lorsque l'on double une source sonore, le niveau sonore est augmenté de 0,3 db. Par exemple, le bruit de deux scooters est 90,3 db, et celui de deux fusées est 180,3 db.
On se pose la question suivante.

> Combien de scooters sont nécessaires pour faire autant de bruit qu'une fusée ?

Pour y répondre, on imagine l'expérience suivante. On commence avec un scooter, et on mesure le niveau sonore. Puis à chaque étape, on double le nombre de scooters, et on mesure le nouveau niveau sonore.
On définie u et v les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

- u_n est le nombre de scooters à l'étape n ;
- v_n est le niveau sonore des scooters à l'étape n ;
- u_1 et v_1 représentent le nombre initial de scooters (un seul) et son niveau sonore.

1. Justifier que u est une suite géométrique de premier terme $u_1 = 1$ et de raison 2, et que v est une suite arithmétique de premier terme $v_1 = 90$ et de raison $0, 3$.
2. Donner la formule explicite des suites u et v.
3. Résoudre $v_n \geqslant 180$, et en déduire combien d'étapes seront nécessaires pour que le niveau sonore des scooters atteigne celui d'une fusée.
4. En déduire combien de scooters sont nécessaires pour obtenir le niveau sonore d'une fusée.

Exercice 2 (Correction)**.**

1. Puisque le nombre de scooters est doublé à chaque étape, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_{n+1} = 2u_n$, donc la suite est géométrique de raison 2. Son premier terme est $u_1 = 1$ (car on commence l'expérience avec un seul scooter).

   De même, à chaque étape, le nombre de scooters double, donc la source sonore double, donc le niveau sonore augmente de 0,3 db : $v_{n+1} = v_n + 0,3$. La suite v est donc arithmétique de raison 0,3, et de premier terme $v_1 = 90$ (car au départ, il y a un seul scooter produisant un bruit de 90 db).
2. Puisque u est géométrique, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ (où q est la raison), donc $u_n = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$.

   Puisque v est arithmétique, alors $v_n = v_1 + (n-1)p$ (où p est la raison) donc $v_n = 90 + 0,3(n-1)$.
3. Résolvons l'inéquation.

$$\begin{array}{rl|rl} v_n & \geqslant 180 & n-1 & \geqslant \frac{90}{0,3} \\ 90+0,3(n-1) & \geqslant 180 & n-1 & \geqslant 300 \\ 0,3(n-1) & \geqslant 90 & n & \geqslant 301 \end{array}$$

   Donc au bout de 301 étapes, le niveau sonore des scooters sera égal à celui d'une fusée.
4. Le nombre de scooters nécessaires est alors donné par le terme u_{301}, soit $u_{301} = 2^{301-1} = 2^{300} \approx 2 \times 10^{90}$.

   C'est un nombre énorme :

   — Pour fabriquer ce nombre de scooters, il aurait fallu, depuis le big bang, fabriquer chaque seconde 10^{72} scooters : un milliard de milliards de milliards de milliards de milliards de milliards de milliards de milliards de scooters chaque seconde.

   — En remplaçant chaque atome de l'univers par *dix milliards* de scooters, on abtiendrait ce nombre.