Exercice 1. On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = & 7 \\ u_{n+1} = & 3u_n + 8 \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

L'objet de l'exercice est de calculer u_{100}.

1. Calculer u_1 et u_2, puis montrer que la suite u n'est ni arithmétique, ni géométrique.

On considère la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n + 4$.

2. Montrer que v est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
3. En déduire le terme général de u, puis calculer u_{100} (ne garder que deux chiffres significatifs).
4. Conjecturer la limite de la suite u.

Exercice 2. On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = & 0,15 \\ u_{n+1} = & 0,68u_n + 0,12 \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

L'objet de l'exercice est de calculer u_{100}.

1. Calculer u_1 et u_2, puis montrer que la suite u n'est ni arithmétique, ni géométrique.

On considère la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n - 0,375$.

2. Montrer que v est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
3. En déduire le terme général de u, puis calculer u_{100} (ne garder que deux chiffres significatifs).
4. Conjecturer la limite de la suite u.

Exercice 1 (Corrigé)**.**

1. $u_1 = 3 \times u_0 + 8 = 3 \times 7 + 8 = 29$; $u_2 = 3 \times u_1 + 8 = 3 \times 29 + 8 = 95$. Puisque $u_1 - u_0 = 22$ et $u_2 - u_1 = 66$, la suite n'est pas arithmétique. Puisque $\frac{u_1}{u_0} \approx 4,1$ et $\frac{u_2}{u_1} \approx 3,3$, alors la suite n'est pas géométrique.
2. On cherche à montrer que $v_{n+1} = qv_n$ (où q est un nombre à déterminer). Trois méthodes, équivalentes, sont proposées.
   Méthode 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :
   $$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1}+4}{u_n+4} \\ &= \frac{3u_n+8+4}{u_n+4} \\ &= \frac{3u_n+12}{u_n+4} \\ &= \frac{3u_n+3\times 4}{u_n+4} \\ &= \frac{3(u_n+4)}{u_n+4} \\ &= 3\end{aligned}$$
   Donc la suite v est géométrique, de premier terme $v_0 = u_0 + 4 = 11$ et de raison 3.
   Méthode 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :
   $$\begin{aligned}v_{n+1} &= u_{n+1} + 4 \\ &= 3u_n + 8 + 4 \\ &= 3u_n + 12\end{aligned}$$
   Pour faire « apparaître » le terme v_n (qui est égal à $u_n + 4$), on factorise par 3.
   $$\begin{aligned}v_{n+1} &= 3u_n + 3 \times \frac{12}{3} \\ &= 3\left(u_n + 4\right) \\ &= 3v_n\end{aligned}$$

Donc la suite v est géométrique, de premier terme $v_0 = u_0 + 4 = 11$ et de raison 3.

Méthode 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 4 \\ &= 3u_n + 8 + 4 \\ &= 3u_n + 12 \end{aligned}$$

Or, puisque $v_n = u_n + 4$, alors $u_n = v_n - 4$, donc :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 3\left(v_n - 4\right) + 12 \\ &= 3v_n - 4 \times 3 + 12 \\ &= 3v_n \end{aligned}$$

Donc la suite v est géométrique, de premier terme $v_0 = u_0 + 4 = 11$ et de raison 3.

3. Puisque la suite v est géométrique, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = 11 \times 3^n$. Et, puisque $v_n = u_n + 4$, alors $u_n = v_n - 4$ et $u_n = 11 \times 3^n - 4$.
   Donc $u_{100} = 11 \times 3^{100} - 4 \approx 5,7 \times 10^{48}$.

Exercice 2 (Corrigé)**.**

1. $u_1 = 0,68 \times 0,15 + 0,12 = 0,222$, et $u_2 = 0,68 \times 0,222 + 0,12 = 0,27096$. Donc :
   - $u_2 - u_1 = 0,27096 - 0,222 = 0,04896$, mais $u_1 - u_0 = 0,222 - 0,15 = 0,072$, donc $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ et la suite n'est pas arithmétique.
   - $\frac{u_2}{u_1} = \frac{0,27096}{0,222} \approx 1,22$, mais $\frac{u_1}{u_0} = \frac{0,222}{0,15} = 1,48$, donc $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$ et la suite n'est pas géométrique.
2. On cherche à montrer que $v_{n+1} = qv_n$ (où q est un nombre à déterminer). Trois méthodes, équivalentes, sont proposées.

Méthode 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1} - 0,375}{u_n - 0,375} \\
&= \frac{0,68u_n + 0,12 - 0,375}{u_n - 0,375} \\
&= \frac{0,68u_n - 0,255}{u_n - 0,375} \\
&= \frac{0,68u_n - 0,68 \times \frac{0,255}{0,68}}{u_n - 0,375} \\
&= \frac{0,68u_n - 0,68 \times 0,375}{u_n - 0,375} \\
&= \frac{0,68\left(u_n - 0,375\right)}{u_n - 0,375} \\
&= 0,68
\end{aligned}$$

Donc la suite v est géométrique de premier terme $v_0 = u_0 - 0,375 = 0,15 - 0,375 = -0,225$, et de raison $0,68$.

Méthode 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 0,375 \\
&= 0,68u_n + 0,12 - 0,375 \\
&= 0,68u_n - 0,255
\end{aligned}$$

Pour pouvoir factoriser par 0,68, on fait apparaître ce nombre dans le deuxième terme.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= 0,68u_n - 0,68 \times \frac{0,255}{0,68} \\
&= 0,68u_n - 0,68 \times 0,375 \\
&= 0,68\left(u_n - 0,375\right) \\
&= 0,68v_n
\end{aligned}$$

Donc la suite v est géométrique de premier terme $v_0 = u_0 - 0,375 = 0,15 - 0,375 = -0,225$, et de raison $0,68$.

Méthode 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 0,375 \\ &= 0,68u_n + 0,12 - 0,375 \\ &= 0,68u_n - 0,255 \end{aligned}$$

Mais puisque $v_n = u_n - 0,375$, alors $u_n = v_n + 0,375$ et :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 0,68 \times (v_n + 0,375) - 0,255 \\ &= 0,68v_n + 0,68 \times 0,375 - 0,255 \\ &= 0,68v_n + 0,255 - 0,255 \\ &= 0,68v_n \end{aligned}$$

Donc la suite v est géométrique de premier terme $v_0 = u_0 - 0,375 = 0,15 - 0,375 = -0,225$, et de raison $0,68$.

3. Donc le terme général de v est : $v_n = -0,255 \times 0,68^n$, et puisque $v_n = u_n - 0,375$, alors $u_n = v_n + 0,375$, et :

$$u_n = -0,255 \times 0,68^n + 0,375$$

Et donc $u_{100} = -0,255 \times 0,68^{100} + 0,375 \approx 0,375$.