

Chapitre 6

Suites numériques

1 Premières définitions

Définition 1. Une *suite* est une fonction définie sur \mathbb{N} (ou une partie de \mathbb{N}) qui à tout entier n (appelé *rang*) de son domaine de définition associe le réel u_n , appelé *terme de la suite*.

Remarque 2. Une définition non formelle est : une suite est une liste infinie de nombres réels, numérotés.

Remarque 3. Une suite peut être définie (entre autres) :

- par récurrence en donnant le(s) premier(s) terme(s) et une formule permettant de calculer les suivants ;
- avec une formule explicite, donnant directement le terme de rang n .

Exemple 4.

- Soit la suite u définie par : $u_n = 3 \times 2^n - 1$. Ses premiers termes sont 2, 5, 11, 23 . . .
- Soit la suite v de premier terme 1, et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n + 1$. Ses premiers termes sont : 1, 3, 7, 15 . . .
- Soit la suite w définie par : w_n est le temps d'ensoleillement, en minutes, au portail du lycée, au n^{e} jour après le premier janvier 2014.

Remarque 5. Soient une suite u .

- u et (u_n) , $(u(n))$ désignent la suite ;
- $u(n)$ et u_n sont des réels : ce sont tous les deux le terme de la suite de rang n .

En prenant une fonction f pour analogie, on peut comparer u et (u_n) à f , et u_n à $f(x)$ (pour un certain x).

Définition 6. Une suite u est dite :

- *croissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$;
- *décroissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$;
- *constante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$.

Exemple 7. TODO Suite croissante, décroissante, croissante à partir d'un certain rang, ni croissante ni décroissante.

2 Suites arithmétiques

Définition 8. Une suite u est dite *arithmétique* s'il existe un réel r , appelé *raison*, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait : $u_{n+1} = u_n + r$.

Habituellement, une suite arithmétique est définie par la donnée de son premier terme et sa raison.

Exemple 9.

- La suite $0, 1, 2, 3$ est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1.
- La suite $-\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ est une suite arithmétique de premier terme $-\frac{\pi}{4}$ et de raison $\frac{\pi}{4}$.
- La suite $97, 1; 96, 2; 95, 3$ est une suite arithmétique de premier terme 97, 1 et de raison $-0, 9$.
- La suite $1, 1, 1, 1$ est une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 0.

Remarque 10. Dans toute la suite, on considère la suite u arithmétique de premier terme u_0 et de raison r .

Méthode 11. TODO Prouver qu'une suite est arithmétique.

Propriété 12.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = u_p + (n - p)r$.
- En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = u_0 + nr$.

Propriété 13. La suite u est :

- (strictement) croissante si et seulement si sa raison est (strictement) positive ;

- (strictement) décroissante si et seulement si sa raison est (strictement) négative ;
- constante si sa raison est nulle.

Démonstration. Soit u une suite arithmétique.

TODO Revoir : cette propriété n'a pas encore été vue.

Alors u est croissante si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Or, puisque u est arithmétique, $u_{n+1} - u_n$ est égale à sa raison, donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ si et seulement si sa raison est positive.

Les autres cas se démontrent de manière similaire. □

Propriété 14. TODO Limite ? Dans le chapitre suivant ?

Propriété 15. La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique est donnée par la formule

$$\text{Somme} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

En particulier :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration. On ne démontre que le cas particulier ; le cas général est admis.

On appelle $S = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n$. En écrivant la même somme, mais en partant du plus grand terme, on a : $S = n + (n-1) + \dots + 2 + 1$.

On ajoute membre à membre ces deux expressions de S :

$$2S = ((1+n) + (2+n-1) + \dots + ((n-1)+2) + (n+1))$$

On remarque alors que chacun de ces termes est égal à $n+1$, et qu'ils sont au nombre de n . Ainsi, $2S = n(n+1)$, ou encore :

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

□

3 Suites géométriques

Définition 16. Une suite v est dite *géométrique* s'il existe un réel q non nul, appelé *raison*, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait : $v_{n+1} = qv_n$.

Habituellement, une suite géométrique est définie par la donnée de son premier terme et de sa raison.

Exemple 17.

- La suite $2, 4, 8, 16, \dots$ est géométrique de premier terme 2 et de raison 2.
- On place 100 € sur un compte en banque, rapportant 3 % d'intérêts par ans. Si on ne place ni ne retire d'argent sur le compte, la suite constituée des sommes présentes sur le compte, en euros, à la fin de chaque année est géométrique de premier terme 100 et de raison 1,03.
- La suite $256, -128, 64, -32, \dots$ est géométrique de premier terme 256 et de raison $-\frac{1}{2}$.
- La suite $3, 3, 3, 3, \dots$ est géométrique de premier terme 3 et de raison 1.

Remarque 18. Dans toute la suite, v est une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q .

Propriété 19.

- Pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = v_p q^{n-p}$.
- En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = v_0 q^n$.

Propriété 20. TODO Simplifier ?

1. Soit w la suite définie par $w_n = q^n$ (pour $n \in \mathbb{N}$). La suite w est :

- croissante si $q \geq 1$;
- décroissante si $0 < q \leq 1$;
- constante si $q = 1$;
- ni croissante ni décroissante si $q < 0$.

De plus, elle est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si $q > 1$ (resp. $0 < q < 1$).

2. La suite v :

- a les mêmes variations que w si $v_0 > 0$;
- a des variations opposées si $v_0 < 0$;
- est constante si $v_0 = 0$.

Démonstration. Soit w la suite géométrique définie dans la propriété, avec q supérieur à 1. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $w_{n+1} = qw_n$ par définition de w . Or quel que soit n , w_n est un produit de termes strictement positifs, donc w_n est lui-même un nombre strictement positif. Donc $\frac{w_{n+1}}{w_n} \geq q$, et la suite est croissante.

Les autres cas se démontrent de manière similaire. □

Remarque 21. On dit qu'une suite géométrique de raison $q > 1$ croît de manière *exponentielle*. TODO développer.

Propriété 22. Soit un nombre réel q différent de 0 et 1. La somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q est donnée par la formule

$$\text{Somme} = \text{Premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

Démonstration. On suppose d'abord que le premier terme de la suite est 1.

Soit v une suite géométrique de premier terme 1 et de raison q ($q \neq 0$ et $q \neq 1$).

Soit n un entier naturel. On pose

$$S = \sum_{k=0}^n v_k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$$

On a alors $qS = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1} = S + q^{n+1} - 1$, et donc $S = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Cas général : le premier terme de la suite n'est pas nécessairement 1.

Soit w la suite définie par $w_n = q^n$. On remarque que pour tout n , $v_n = v_0 q^n = v_0 w_n$. Donc la somme des termes de 0 à n de v vaut :

$$\sum_{k=0}^n v_k = \sum_{k=0}^n v_0 w_k = v_0 \sum_{k=0}^n w_k = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

□

4 Variations d'une suite

Propriété 23. Soit u une suite, telle que tous ses termes sont strictement positifs.

- u est croissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.
- u est décroissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$.

Propriété 24. Soient u une suite, et f une fonction telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait : $u_n = f(n)$.

- Si f est croissante sur $[0; +\infty[$, alors u est croissante sur \mathbb{N} .
- Si f est décroissante sur $[0; +\infty[$, alors u est décroissante sur \mathbb{N} .
- La réciproque n'est pas vraie en général.

Exemple 25. TODO Exemple de réciproque vraie et fausse.

Définition 26 (Notion de limite). *Ces définitions ne sont pas formelles.*

- On dit qu'une suite u tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsqu'elle peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut (en prenant n suffisamment grand). On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (resp. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$).
- On dit qu'une suite u tend vers un réel l lorsqu'elle peut prendre des valeurs v_n aussi proches de l que l'on veut (en prenant n suffisamment grand). On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

5 Algorithmes

TODO

Valeur du terme de rang n (terme et somme)

Dépassement de seuil (terme et somme)