Chapitre 1

Fonctions de référence

1 Variations

Définition 1. Dans le plan muni d'un repère, la courbe représentative d'une fonction f est l'ensemble des points $(x; f(x))$ pour tout x de l'ensemble de définition de f.

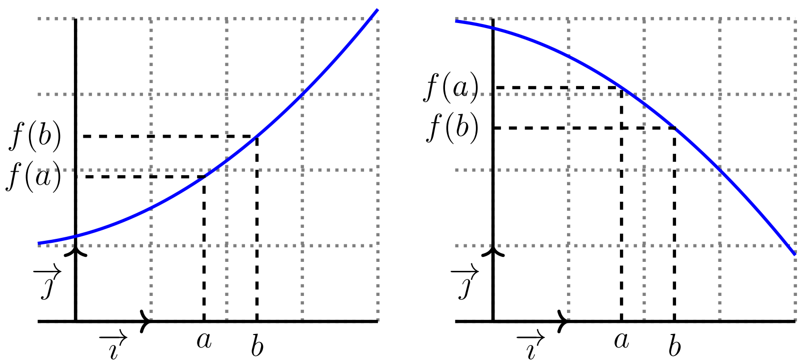
Définition 2. Soit une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ (où $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$).

— On dit que f est *croissante* (respectivement *strictement croissante*) si quels que soient a et b dans $\mathcal{D}$, si $a < b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$ (respectivement $f(a) < f(b)$). On dit aussi que « la fonction f conserve l'ordre ».

— On dit que f est *décroissante* (respectivement *strictement décroissante*) si quels que soient a et b dans $\mathcal{D}$, si $a < b$, alors $f(a) \geqslant f(b)$ (respectivement $f(a) > f(b)$). On dit aussi que « la fonction f inverse l'ordre ».

— On dit que f est *constante* si quels que soient a et b dans $\mathcal{D}$, alors $f(a) = f(b)$.

— On dit qu'une fonction est *monotone* (respectivement *strictement monotone*) si elle est croissante ou décroissante (respectivement strictement croissante ou décroissante).



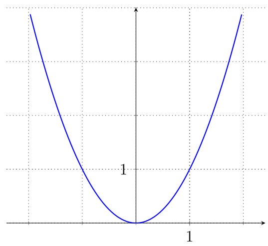
2 Bestiaire

2.1 Fonction carré

Définition 3. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est appelée *fonction carré.*

Propriété 4 (Variations)**.** Le tableau de variations de la fonction carré est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$\searrow$	0	$\nearrow$

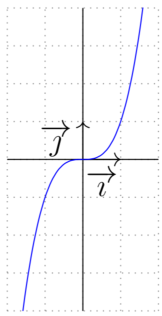


2.2 Fonction cube

Définition 5. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ est appelée *fonction cube.*

Propriété 6 (Variations)**.** Le tableau de variations de la fonction cube est :

x	$-\infty$	$+\infty$
x^3	$\nearrow$	

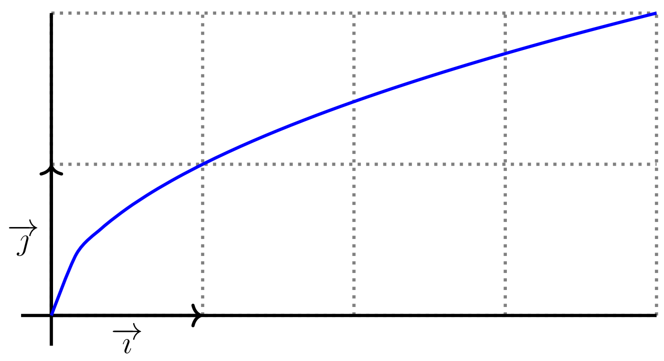


2.3 Fonction racine carrée

Définition 7.

— Étant donné un nombre réel positif a, sa racine carrée $\sqrt{a}$ désigne l'unique nombre positif dont le carré est a.

— La fonction racine carrée est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ qui a chaque réel positif x associe sa racine carrée $\sqrt{x}$.



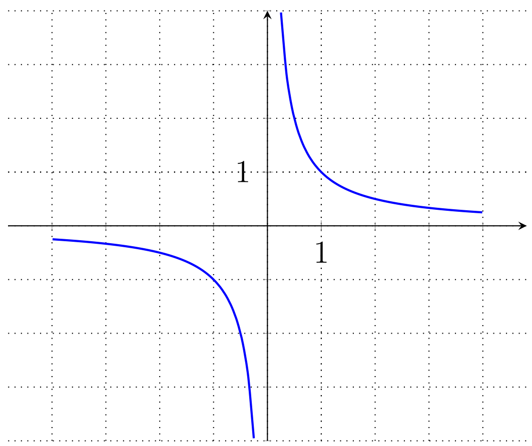
Propriété 8. La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

2.4 Fonction inverse

Définition 9. La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ est appelée *fonction inverse.*

Propriété 10 (Variations)**.** Le tableau de variations de la fonction inverse est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$



2.5 Fonction valeur absolue

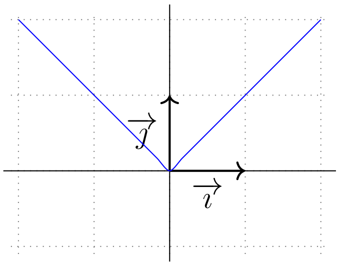
Définition 11. La *valeur absolue* d'un nombre réel x, noté, $|x|$, est égale à

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Définition 12. La *fonction valeur absolue* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui a tout x associe sa valeur absolue $|x|$.

Propriété 13. Les variations de la fonction valeur absolue sont :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\lvert x\rvert$	$\searrow$	0	$\nearrow$



3 Polynômes du second degré

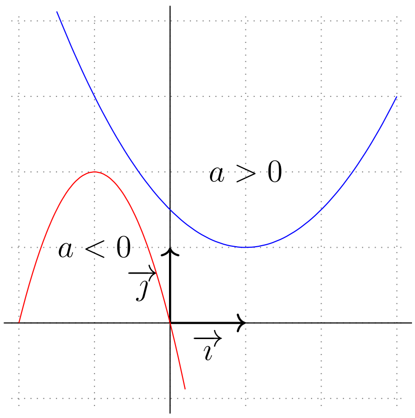
Définition 14 (Fonction polynôme du second degré)**.** Toute fonction f pouvant s'écrire sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) est appelée fonction polynôme du second degré.

Dans la suite du chapitre, f est un polynôme du second degré défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

3.1 Représentation graphique

Propriété 15 (Symétrie)**.** La courbe représentative d'un polynôme du second degré admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.

Propriété 16 (Représentation graphique)**.** La courbe représentative d'un polynôme du second degré est une parabole.



Définition 17. On appelle *sommet* le point qui correspond à l'extremum de la fonction. Il est situé sur l'axe de symétrie de la parabole, donc son abscisse est $-\frac{b}{2a}$.

3.2 Formes d'un polynôme du second degré

Définition 18. On appelle *racines* d'un polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Définition 19 (Utilité des différentes formes)**.**

- Forme factorisée : $a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $a \neq 0$, et éventuellement $x_1 = x_2$.
  - Met en valeur les racines.
  - Cette forme n'existe pas toujours.
- Forme canonique : $a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $a \neq 0$.
  - Met en valeur l'extremum et l'abscisse à laquelle il est atteint.
  - Existe toujours.
- Forme développée : $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$
  - Forme « par défaut ».
  - Utile pour calculer des images.

Propriété 20. Soit un trinôme, et a, b, c, α, β, x_1, x_2 les paramètres des différentes formes décrits dans la définition précédente. Alors :

- $\alpha = -\frac{b}{2a}$
- $\beta = f(\alpha)$
- $\frac{x_1+x_2}{2} = \alpha$
- $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

3.3 Variations

Propriété 21 (Variations d'un polynôme du second degré)**.** Les variations d'un polynôme du second degré sont les suivantes.

- Si $a > 0$:

x	$-\infty$ $\quad -\frac{b}{2a}$ $\quad +\infty$
$ax^2 + bx + c$	$\searrow \quad \nearrow$

- Si $a < 0$

x	$-\infty$ $\quad -\frac{b}{2a}$ $\quad +\infty$
$ax^2 + bx + c$	$\nearrow \quad \searrow$