Répondez par écrit aux questions marquées d'un ✏️.

Définition. On appelle *polynôme du second degré* toute fonction de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des nombres réels, avec $a \neq 0$.

Exercice 1 (Fonction trinôme)**.**

1. Sur Geogebra, créer trois curseurs nommés a, b et c pouvant varier de -5 à 5 selon des incréments de 0,1 pour a et de 1 pour b et c puis, dans la zone de saisie, créer la fonction : `a * x^2 + b * x + c`.
2. ✏️ Donner à a la valeur 0. Quelle est la nature de la courbe obtenue ? Quelle est la nature de la fonction f ?

Pour toute la suite on prendra $a \neq 0$.

3. (a) Donner à a la valeur 1 et à b et c la valeur 0.
   (b) ✏️ De quelle nature est la courbe obtenue ?

   Le sommet est le point de la parabole le plus extrême (le plus haut ou le plus bas).

   (c) ✏️ Indiquer l'abscisse de son sommet et ses éléments de symétrie.
   (d) ✏️ Donner l'expression de $f(x)$.
   (e) ✏️ Par lecture graphique, dresser le tableau des variations de f.
4. (a) Donner à b et c la valeur 0 et faire varier a.
   (b) ✏️ Quel semble être le « rôle » de a ?
   (c) ✏️ Dans quel cas le tableau de variations de f est-il identique au précédent et dans quel cas est-il différent ?
5. (a) Donner à a et b des valeurs quelconques (mais $a \neq 0$), et faire varier c.
   (b) ✏️ Quel semble être le « rôle » de c ?
   (c) ✏️ Que peut-on dire de l'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées ?
   (d) ✏️ Démontrer par le calcul que toute fonction de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ coupe l'axe des ordonnées en un point dont les coordonnées ne dépendent que de c.
6. On notera x_0 l'abscisse du sommet de la courbe.
   (a) Donner à a la valeur 1, à c la valeur 0 et faire varier b, puis ✏️ compléter le tableau suivant :

b	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x_0											

   Conjecturer une formule permettant de calculer x_0 en fonction de b (avec $a = 1$, et $c = 0$).

   (b) Donner à a la valeur 2, à c la valeur 0 et faire varier b, puis ✏️ compléter le tableau suivant :

b	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x_0											

   Conjecturer une formule permettant de calculer x_0 en fonction de b (avec $a = 2$, et $c = 0$).

(c) Donner à a la valeur $-0,5$, à c la valeur 0 et faire varier b, puis ✏️ compléter le tableau suivant :

b	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x_0											

Conjecturer une formule permettant de calculer x_0 en fonction de b (avec $a = -0,5$, et $c = 0$).

(d) ✏️ Faire varier c. Cela influence-t-il x_0 ?

(e) ✏️ Conjecturer l'expression de x_0 en fonction de a et b.
Que peut-on dire des éléments de symétrie de la courbe dans tous les cas ?

7. ✏️ Régler le curseur b pour que son incrément soit maintenant de 0,1.
On admettra qu'un projectile lancé en l'air suit une trajectoire parfaitement parabolique.
Un projectile est lancé depuis une colline depuis une altitude de 400 m symbolisée par le point $A\,(0\,;\,4)$. Il doit atteindre une cible située à 1 000 m à l'altitude 0, symbolisée par le point $B\,(10\,;\,0)$. Pour des raisons de sécurité, son altitude maximum ne doit pas dépasser 800 m.
Déterminer des valeurs de a, b et c permettant d'obtenir une courbe symbolisant la trajectoire de ce projectile et satisfaisant toutes ces conditions.

Exercice 2 (Forme canonique)**.** Sur Geogebra, ouvrir un nouveau fichier, et créer trois curseurs nommés α, β et γ pouvant varier de -5 à 5 selon des incréments de 0,5 puis, dans la zone de saisie, créer la fonction $f(x) = \alpha * (x-\beta)^2 + \gamma$.

1. (a) Dans la zone de saisie, créer la fonction $g(x) = 2x^2 - 2x + 4$.
   (b) ✏️ Déterminer les valeurs de α, β et γ telles que la courbe de f et celle de g soient confondues.
   (c) ✏️ Vérifier par le calcul que les deux fonctions sont bien égales.
   (d) ✏️ Noter l'abscisse du sommet de la courbe.
   (e) ✏️ Par le calcul, déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $g(x) = 0$.
   Comment cela se traduit-il graphiquement ?
2. ✏️ Mêmes questions avec $g(x) = -1,5x^2 - 6x - 4,5$.
3. ✏️ Mêmes questions avec $g(x) = -0,5x^2 - 2x - 1,5$.
4. *Cas général* Soit g une fonction trinôme du second degré $g : x \mapsto ax^2 + bx + c$.
   (a) ✏️ Conjecturer quelles doivent être les valeurs de α et de β (en fonction de a, b et c) pour que $f(x) = g(x)$.
   (b) ✏️ **Par le calcul**, en utilisant la conjecture précédente, déterminer les valeurs de α, β et γ pour que la fonction f soit égale à la fonction $g(x) = 2x^2 - 4x - 1$.
   (c) ✏️ Déduire les valeurs exactes des coordonnées des points d'intersection de la courbe de g avec l'axe des abscisses.
   Vérifier si vos résultats coïncident avec la courbe de la fonction sur Geogebra.