Exercice 1 (Automatismes)**.** *Répondez sans justifier aux questions suivantes. Pour chaque question, une seule réponse est correcte.*

1. *L'opération qui permet de calculer 25 % de 480 est :*

   (a) $\dfrac{480}{25\times100}$ (b) $25\times480\times0{,}1$ (c) $\dfrac{480\times100}{25}$ (d) $\dfrac{1}{4}\times480$

   Le signe % est une abréviation pour dire $\div100$ (« divisé par 100 »). Donc 25% de 480 est :
   $$\frac{25}{100}\times480=\frac{25}{25\times4}\times480=\frac{1}{4}\times480$$
   Réponse D.

2. *Voici trois nombres :* (a) $A=\dfrac{1}{5}$ (b) $B=\dfrac{19}{100}$ (c) $C=0{,}21$. Le classement par ordre croissant de ces trois nombres est :

   (a) $A<B<C$ (b) $A<C<B$ (c) $B<A<C$ (d) $C<B<A$

   Pour classer ces trois nombres, mettons-les au même dénominateur, ici 100 :
   $$A=\frac{1}{5}=\frac{1\times20}{5\times20}=\frac{20}{100}$$
   $$B=\frac{19}{100}$$
   $$C=0{,}21=\frac{21}{100}$$

   Puisque $19<20<21$, alors $\frac{19}{100}<\frac{20}{100}<\frac{21}{100}$, et donc $B<A<C$: réponse C.

3. *Voici quatre nombres :* (a) $A=\left(\dfrac{1}{5}\right)^2$ (b) $B=\left(\dfrac{1}{2}\right)^5$ (c) $C=0{,}05$ (d) $D=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$. Le plus grand de ces quatre nombres est :

   (a) A (b) B (c) C (d) D

   Nous voyons que ces quatre nombres peuvent être mis sous la forme d'inverses d'entiers.
   $$A=\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1^2}{5^2}=\frac{1}{25}$$
   $$B=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1^5}{2^5}=\frac{1}{2\times2\times2\times2\times2}=\frac{1}{32}$$
   $$C=0{,}05=\frac{5}{100}=\frac{5}{5\times20}=\frac{1}{20}$$
   $$D=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1^3}{3^3}=\frac{1}{3\times3\times3}=\frac{1}{27}$$

Donc, puisque $20<25<27<32$, alors $\frac{1}{20}>\frac{1}{25}>\frac{1}{27}>\frac{1}{32}$, et donc $C>A>D>B$. Le plus grand de ces nombres est C.

4. *Un article augmente de 10 % puis il augmente encore de 10 %.* Après ces deux augmentations il a augmenté de :

   (a) $(10\%)^2$ (b) 19 % (c) 20 % (d) 21 %

   Une augmentation de 10% correspond à une multiplication par 1,1. Donc le prix initial a été multiplié par 1,1 pour chacune des deux augmentations, soit une multiplication globale par $1{,}1\times1{,}1=1{,}21$ (car $11\times11=10\times11+1\times11=110+11=121$). Or une multiplication par 1,21 correspond à une augmentation de $1{,}21-1=0{,}21=21\%$: réponse D.

5. *On lance un dé équilibré à six faces, numérotées de 1 à 6, et on regarde le résultat obtenu. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu 6, sachant que le résultat est pair ?*

   (a) $\dfrac{1}{12}$ (b) $\dfrac{1}{3}$ (c) $\dfrac{1}{6}$ (d) $\dfrac{2}{9}$

   Le résultat est pair, donc le dé est tombé sur l'une des faces 2, 4, ou 6, avec la même probabilité. Donc la probabilité d'obtenir 6 est $\frac{1}{3}$: réponse B.

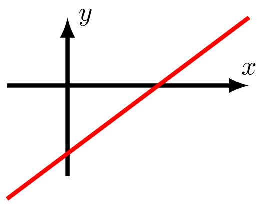
6. *Une durée de 100 minutes correspond à :*

   (a) 1 heure (b) 1,40 heure (c) $\dfrac{5}{3}$ heure (d) 2 heures

   Une heure correspond à 60 minutes, donc, puisque $100=60+40$, alors 100 minutes correspondent à une heure et 40 minutes, ce qui *n'est pas égal* à 1,40 heures (par exemple, une demie heure est 30 minutes, soit 0,5 heures, pas 0,30 heures). Essayons autrement…

   Une heure correspond à 60 minutes, donc 100 minutes correspondent à $\frac{100}{60}$ heures, soit : $\frac{100}{60}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$: réponse C.

7. *On considère une droite D représentée ci-contre. La seule équation pouvant correspondre à l'équation réduite de la droite D est :*

   (a) $y=x+3$ (c) $y=-x+3$

   (b) $y=x-3$ (d) $y=-x-3$

   Si on regarde la droite de gauche à droite, elle va de bas en haut, donc la fonction affine correspondante est croissante, donc son coefficient directeur est positif, donc son équation est l'une des deux réponses A ou B. Puisque la droite croise l'axe des ordonnées sous l'axe des abscisses (dans les négatifs), alors l'ordonnées à l'origine est négative, donc son équation est l'une des deux réponses B ou D.

   La seule réponse possible est donc B.

Exercice 2 (Inspiré du sujet de bac de terminale L, Amérique du nord, mai 2011)**.** *Dans un des départements français, il a été établi que :*

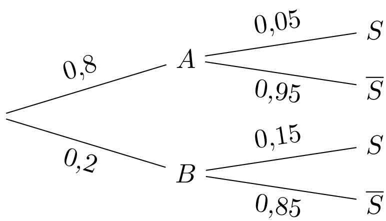
- *Sur les 350 000 salariés : 80 % sont salariés du secteur privé et 20 % sont salariés du secteur public.*
- *Parmi les salariés du secteur privé, 5 % sont syndiqués.*
- *Parmi les salariés du secteur public, 15 % sont syndiqués.*

On choisit une personne au hasard parmi les 350 000 salariés, et on note A l'évènement « la personne est salariée du secteur privé », B l'évènement « la personne est salariée du secteur public », et S l'évènement « la personne est syndiquée ». On note aussi $\overline{S}$ évènement contraire de S.

1. (a) *Sans justifier, donner la valeur de $P(A)$.*
   $P(A)$ est la probabilité que la personne prise au hasard soit salariée du secteur privée, soit 80% ou 0,8.

   (b) *Exprimer par une phrase, puis sans justifier, donner la valeur de $P_B(S)$.*
   $P_B(S)$ est la probabilité que la personne soit syndiquée, sachant qu'elle est salariée du secteur public. Donc $P_B(S)=15\%=0{,}15$.

2. *Recopier sur votre copie, et compléter, l'arbre pondéré suivant.*



3. (a) *Montrer que la probabilité $P(B\cap S)$, de l'évènement $B\cap S$ est égale à 0,03.*

$$P(B\cap S)=P(B)\times P_B(S)=0{,}2\times 0{,}15=0{,}03$$

   Remarque : pour calculer $0{,}2\times 0{,}15$, on a calculé $2\times 15=30$, et puisque qu'il y a, au total, trois chiffres après la virgule dans les nombres de départ (un chiffre après la virgule pour 0,2, deux pour 0,15), alors il y a trois chiffres après la virgule pour le résultat, qui est alors $0{,}030=0{,}03$.

   (b) *Déterminer la probabilité $P(S)$.*

$$\begin{aligned}P(S)&=P(A\cap S)+P(B\cap S)\\&=P(A)\times P_A(S)+0{,}03\\&=0{,}8\times 0{,}05+0{,}03\\&=0{,}04+0{,}03\\&=0{,}07\end{aligned}$$

4. *Un journal local annonce que dans ce département « moins d'un syndiqué sur deux est salarié du public ».*

   Commenter cette affirmation.

   Calculons $P_S(B)$, la probabilité qu'en personne soit salariée du public, sachant qu'elle est syndiquée :
$$P_S(B) = \frac{P(S \cap B)}{P(S)} = \frac{0{,}03}{0{,}07} = \frac{3}{7}$$
   Or, puisque $0{,}5 = \frac{3{,}5}{7}$, alors $\frac{3}{7} < 0{,}5$, donc $P_S(B) < 0{,}5$, et l'affirmation est correcte.

Exercice 3 (Inspiré du bac de terminale L, métropole, septembre 2010)**.** *La gérante d'un magasin de chaussure commande auprès d'un cabinet spécialisé une étude pour mieux s'adapter à sa clientèle. Celui-ci a notamment compté le nombre de personnes entrant dans le magasin, en fonction de son genre supposé, et observé si ces personnes ont fait ou non au moins un achat. Les résultats ont été consignés dans le tableau suivant.*

	Homme	*Femme*	*Total*
Au moins un achat	*10*	*20*	...
Pas d'achat	*40*	...	...
Total	...	...	*100*

On interroge au hasard une personne à la sortie du magasin, et on note les évènements suivants :

- *A : « la personne interrogée a fait au moins un achat », et $\overline{A}$ l'évènement contraire de A.*
- *F : « la personne interrogée est une femme » et $\overline{F}$ évènement contraire de F.*

1. *Recopier et compléter le tableau sur votre copie.*

   La règle utilisée pour compléter le tableau est que le total est la somme de la ligne ou de la colonne (par exemple : $10+20=30$, et $100-30=70$).

	Homme	Femme	Total
Au moins un achat	10	20	30
Pas d'achat	40	30	70
Total	50	50	100

2. *Déterminer la probabilité de l'évènement $H \cap \overline{A}$.*

   Erreur d'énoncé : l'évènement H n'a jamais été défini. On suppose qu'il veut dire : « La personne interrogée est un homme ».

   L'évènement $H \cap \overline{A}$ correspond à « La personne interrogée est un homme, et n'a pas fait d'achats. ». Sa probabilité est donc $P\left(H \cap \overline{A}\right) = \frac{40}{100} = 0{,}4$.

3. *Quelle est la probabilité que la personne ait fait au moins un achat ?*

   30 personnes ont fait au moins un achat, donc $P(A) = \frac{30}{100} = 0{,}3$.

4. *La personne sortant du magasin est une femme. Quelle est la probabilité qu'elle ait fait au moins un achat ?*

   Parmi les 50 femmes, 20 ont fait au moins un achat, donc $P_F(A)=\frac{20}{50}=0{,}4$.

5. *Les évènements A et F sont-ils indépendants ? Justifier.*

   On a montré que $P(A)=0{,}3$, et $P_F(A)=0{,}4$. Donc $P(A)\neq P_F(A)$, et les évènements A et F ne sont pas indépendants.

Exercice 4 (Inspiré du bac de première L, Amérique du nord, juin 2005)**.** *Une lycéenne de terminale étudie, pour son grand oral portant sur ses spécialités SVT et mathématiques, l'évolution de la population de grenouilles de l'étang de sa commune. Selon le club des écologistes de cette commune, cette population serait en voie de disparition et les membres du club s'en inquiètent. Pour effectuer son étude, la lycéenne ne dispose d'abord que des deux relevés suivants, effectués par le club :*

Année du relevé (au premier novembre)	*2022*	*2023*
Population de grenouilles	*1 000*	*950*

La lycéenne modélise l'évolution de la population de grenouilles à l'aide d'une suite.

1. Première modélisation. *La lycéenne fait l'hypothèse qu'une suite arithmétique permet de modéliser l'évolution de la population de grenouilles. Elle note cette suite (u_n) où u_0 est la population de grenouilles le premier novembre 2022, et plus généralement, u_n est la population de grenouilles le premier novembre $(2022+n)$.*

   (a) *Calculer la raison r de la suite (u_n).*

   Puisque la population de grenouille a baissé de 50 individus entre les deux premières années de l'étude, alors la raison de la suite est -50.

   (b) *Selon ce modèle, quelle serait la population de grenouilles le premier novembre 2025 ? Le premier novembre 2032 ? Le premier novembre $(2022+n)$?*

   En 2025, soit deux ans après 2023, la population serait de $950-2\times 50=850$ individus. En 2032, soit 10 ans après le début de l'étude, la population serait de $1000-10\times 50=500$ individus.

   En $2022+n$, soit n années après le début de l'étude, la population serait de $u_n=u_0-50n=1000-50n$.

   (c) *Déterminer l'année où la population de grenouilles aura totalement disparu selon ce modèle.*

   Selon ce modèle, la population aura disparu lorsque $u_n\leqslant 0$:

$$\begin{aligned} u_n &\leqslant 0\\ 1000-50n &\leqslant 0\\ 1000 &\leqslant 50n\\ \frac{1000}{50} &\leqslant n\\ 20 &\leqslant n \end{aligned}$$

   Donc la population aura disparu dans 20 ans, en 2042.

(d) *La lycéenne reçoit le relevé effectué le premier novembre 2024 :* 903 *grenouilles. Est-ce que ce nouveau résultat confirme son hypothèse ?*

Selon son modèle, en 2023, il y aura $950-50=900$ individus, ce qui ne correspond pas aux 903 grenouilles observées : ce nouveau résultat ne confirme pas son hypothèse.

2. Seconde modélisation *Poursuivant sa réflexion, la lycéenne se demande cette évolution pourrait mieux être modélisée en supposant que la population de grenouilles diminue de 5% chaque année. Elle modélise alors la population par une suite v, où v_0 est la population de grenouilles le premier novembre 2022 et plus généralement, v_n la population de grenouilles le premier novembre $(2022+n)$.*

   Des aides au calcul sont disponibles à la fin de l'énoncé.

   (a) i. *Justifier que la suite v est une suite géométrique de raison* 0,95.
   Une diminution de 5% correspond à une multiplication par 0,95, donc pour calculer un terme de la suite, on multiplie le précédent par 0,95. C'est la définition d'une suite géométrique de raison 0,95.

   ii. *Expliquer pourquoi ce nouveau modèle semble mieux adapté.*
   Les trois premières valeurs mesurées sont les populations en 2022, 2023, 2024 : 1000, 950, 903.
   Puisque la suite v est géométrique, alors son terme général est $v_n = v_0 \times 0{,}95^n = 1000 \times 0{,}95^n$. Donc, en s'aidant de la table de valeurs en fin d'énoncé, on a :

$$
\begin{aligned}
v_0 &= 1000 \\
v_1 &= 1000 \times 0{,}95^1 = 950 \\
v_2 &= 1000 \times 0{,}95^2 = 903
\end{aligned}
$$

   On retrouve bien les valeurs observées les trois premières années (1000 individus en 2022, 950 en 2023, et 903 en 2024), donc ce modèle semble adapté.

   (b) i. *Quelle serait alors, à l'entier près, la population de grenouilles le premier novembre 2025 ?*
   Le premier novembre 2025 correspond à l'année 2022+3, donc la population sera $v_3 = 1000 \times 0{,}95^3 \approx 857$ grenouilles.

   ii. *Pour tout entier naturel n, écrire v_n en fonction de n.*
   Nous avons montré plus haut que pour tout entier naturel n, on a $v_n = 1000 \times 0{,}95^n$.

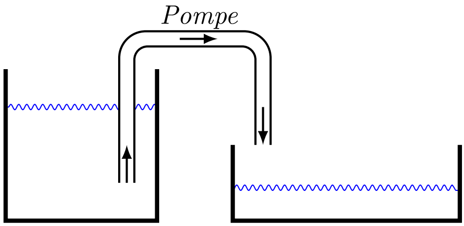
   iii. *En déduire, à l'entier près, quelle serait la population de grenouilles le premier novembre 2032 ?*
   L'année 2032 correspond à 2022+10, soit $v_10 = 1000 \times 0{,}95^10 \approx 599$ grenouilles.

   (c) *Cette espèce sera considérée en danger critique d'extinction quand sa population sera inférieure à cinquante individus. Donner un encadrement, à dix ans près, de l'année à laquelle cela se produira.*

   Dans la table de valeurs, on lit que 1000×50^n deviendra inférieur à 50 lorsque n est compris entre 50 et 60. Cela veut dire que le plus petit n tel que $v_n < 50$ est compris entre 50 et 60, et donc que la population de grenouilles sera inférieure à cinquante individus 50 à 60 ans après le début de l'étude, soit entre 2072 et 2082.

n	0	1	2	3	4	5	10
$1000\times0{,}95^n$	1000	950	903	857	815	774	599
n	20	30	40	50	60	70	80
$1000\times0{,}95^n$	358	215	129	77	46	28	17

Exercice 5. *On installe une pompe entre deux bassins partiellement remplis d'eau. Cette pompe fait passer l'eau du bassin de gauche à celui de droite à la vitesse de* $5\,\mathrm{m}^3/\mathrm{h}$*. Initialement, le bassin de gauche contient* $23\,\mathrm{m}^3$*, et le bassin de droite contient* $7\,\mathrm{m}^3$*.*



Au bout de combien de temps (à la minute près) les deux bassins contiendront-ils le même volume d'eau ?

Il y a au total $23+7=30\mathrm{m}^3$ d'eau dans les deux bassins. On cherche donc le moment où les deux bassins contiendront $\frac{30}{2}=15\mathrm{m}^3$ d'eau. Intéressons nous uniquement au bassin de droite (en effet, en négligeant la quantité d'eau présente dans les tuyaux et la pompe, lorsque celui de droite aura $15\,\mathrm{m}^3$ d'eau, alors celui de gauche aura la même quantité d'eau).

Puisque le bassin de droite contient au départ $7\,\mathrm{m}^3$ d'eau, et que cette quantité augmente de $5\,\mathrm{m}^3$ d'eau par heure, alors au bout de t heures, la quantité d'eau du bassin de droite, en m^3, est donnée par la formule $7+5t$. On veut que ce bassin contienne $15\,\mathrm{m}^3$ d'eau, donc on cherche à résoudre :

$$\begin{aligned}7+5t&=15\\5t&=15-7\\5t&=8\\t&=8\div5\end{aligned}$$

Les deux bassins auront donc la même quantité d'eau au bout de $\frac{8}{5}$ heures, soit $\frac{8}{5}=\frac{8\times2}{5\times2}=\frac{16}{10}=1{,}6$ heures, soit une heure et 0,6 heures.

Puisque qu'une heure correspond à 60 minutes, alors 0,6 heures correspondent à $0{,}6\times60=0{,}6\times6\times10=0{,}6\times10\times6=6\times6=36$ minutes.

Les deux bassins seront donc autant remplis au bout d'une heure et 36 minutes.