

Exercice 1. *Un pays fait face à une épidémie, pour laquelle un vaccin a finalement été développé. Mais de nombreuses personnes contestent son efficacité en faisant remarquer que, parmi les personnes hospitalisées pour cette maladie, près d'une sur deux a été vaccinée.*

On prend une personne au hasard dans la population, et on considère les évènements suivants :

- H : la personne est hospitalisée à cause de la maladie.
- V : la personne est vaccinée.

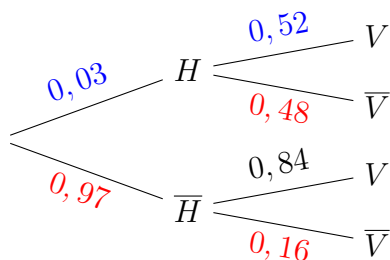
En utilisant des statistiques des hôpitaux, et celles des centres de vaccination, on sait que :

- *3% de la population est actuellement à l'hôpital à cause de cette maladie ;*
- *parmi les personnes hospitalisées des suites de cette maladie, 52% est vaccinée ;*
- *parmi les personnes qui ne sont pas hospitalisées à cause de cette maladie, 84% est vaccinée.*

Toutes les réponses seront arrondies à 10^{-4} près.

1. *Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.*

Les valeurs en **bleu** sont tirées de l'énoncé, les valeurs en **rouge** ont été obtenues par des calculs.



2. *Décrire l'évènement $H \cap V$ et calculer sa probabilité.*

$H \cap V$ est l'évènement « la personne choisie est hospitalisée et vaccinée ». Sa probabilité est :

$$\begin{aligned}
 P(H \cap V) &= P(H) \times P_H(V) \\
 &= 0,03 \times 0,52 \\
 &= 0,0156
 \end{aligned}$$

3. Montrer que $P(V) = 0,8304$.

$$\begin{aligned} P(V) &= P(V \cap H) + P(V \cap \overline{H}) \\ &= 0,0156 + P(\overline{H}) \times P_{\overline{H}}(V) \\ &= 0,0156 + 0,97 \times 0,84 \\ &= 0,8304 \end{aligned}$$

4. En déduire $P_V(H)$.

$$P_V(H) = \frac{P(V \cap H)}{P(V)} = \frac{0,0156}{0,8304} \approx 0,0188$$

5. On admet que $P_{\overline{V}}(H) = 0,0849$. Le vaccin permet-il de réduire la probabilité d'une personne d'être hospitalisée à cause de cette maladie ? Justifier.

On a $P_{\overline{V}}(H) = 0,0846$ et $P_V(H) = 0,0188$, donc la probabilité pour une personne vaccinée d'être hospitalisée est bien inférieure à la probabilité pour une personne non vaccinée d'être hospitalisée. Donc le vaccin est efficace.

Exercice 2. Afin de lutter contre une chenille s'attaquant à une plante, on a développé un insecticide dont on cherche à évaluer l'efficacité. On a planté un grand nombre de ces plantes, dont certaines ont été traitées avec l'insecticide, et d'autres non. On a ensuite observé lesquelles étaient attaquées par la chenille. Les résultats ont été consignés dans le tableau suivant.

	Attaquées par la chenille		Total
	Oui	Non	
Avec insecticide	24	36	60
Sans insecticide	72	108	180
Total	96	144	240

On choisit une plante au hasard, et on note les événements suivants :

- I : la plante a été traitée avec l'insecticide ;
- C : la plante a été attaquée par la chenille.

1. Quelle est la probabilité qu'une plante choisie au hasard ait été traitée à l'insecticide et attaquée par une chenille ?

Il y a 240 plantes au total, dont 24 traitée avec l'insecticide et attaquées par la chenille, donc $P(I \cap C) = \frac{24}{240} = 0,10$.

2. Calculer $P(C)$.

$$P(C) = \frac{96}{240} = 0,4$$

3. Exprimer par une phrase, et calculer la probabilité $P_I(C)$.

$P_I(C)$ est la probabilité que la plante soit attaquée par la chenille sachant qu'elle a été traitée à l'insecticide.

$$P_I(C) = \frac{\text{Card}(I \cap C)}{\text{Card}(I)} = \frac{24}{60} = 0,4$$

4. Les évènements C et I sont-ils indépendants ? Justifier.

On remarque, d'après les calculs précédents, que $P(C) = P_I(C)$, donc les évènements sont indépendants.

5. L'insecticide est-il efficace ? Justifier.

Nous venons de montrer que les évènements I et C sont indépendants, ce qui veut dire que le fait qu'il y ait ou non de l'insecticide n'a aucune influence sur la probabilité d'une plante de se faire attaquer par les chenilles : l'insecticide est inefficace.