a Fréquences marginales, fréquences conditionnelles

Définition. Dans un tableau croisé d'effectifs :

— la valeur à l'intersection d'une ligne et d'une colonne est le nombre d'individus présentant simultanément les deux caractères ;

— on appelle ____________________ l'effectif d'une sous-population qui ne dépend que d'un seul caractère. Ces effectifs sont représentés dans la ligne « Total » ou la colonne « Total » ;

— la _________________________ d'une valeur est le quotient :

$$\frac{\text{Effectif marginal}}{\text{Effectif total}}$$

— la ______________________________ de la valeur x_i sachant y_j est le quotient :

$$\frac{\text{Effectif présentant les valeurs } x_i \text{ et } y_j}{\text{Effectif marginal de la valeur } y_j}$$

Exemple. Une association récupère des vélos jetés à la déchetterie pour éventuellement les remettre en état. Ces vélo sont de deux types : adulte ou enfant. Leur état est classé en trois catégories : bon état (prêts à rouler) ; réparable (peuvent être remis en état en moins de deux heures) ; non réparable (trop de réparation à faire). Voici le nombre de vélos traités en un mois.

	Bon état	Réparable	Non réparable	Total
Adulte	7	26	12	
Enfant		18	5	26
Total				

1. Complétez le tableau.
2. Parmi les vélos réparable, combien sont des vélos adultes ?
3. Calculez la fréquence marginale de vélos en bon état parmi l'ensemble des vélos de l'association.
4. Calculez la fréquence conditionnelle de vélos enfant parmi les vélos en bon état.

b Probabilités conditionnelles

Définition (Rappels)**.** Étant donnés deux évènements A et B d'un univers Ω :

- l'intersection de A et B, notée $A \cap B$, est ____ ;
- l'union de A et B, notée $A \cup B$, est ____ ;
- le contraire de A, noté $\overline{A}$, est ____.

Exemple 1. On considère les élèves de cette classe, et :

- $A =$ « l'ensemble des garçons » ;
- $B =$ « l'ensemble des personnes portant des lunettes ».

Alors :

- $A \cup B$ est : ____.
- $\overline{B}$ est : ____.
- $A \cap \overline{B}$ est : ____.

Définition (Rappel)**.** On choisi de manière équiprobable un individu au hasard dans une population, et on considère un évènement A. Alors :

$$P(A) =$$

Exemple 2. Pour vérifier la qualité d'une chaîne de montage d'aspirateurs, une équipe vérifie leur fonctionnement : sur 67 aspirateurs étudiés, 3 ne fonctionnent pas.
On choisit un aspirateur au hasard à la sortie de cette chaîne de montage. Quelle est la probabilité qu'il ne fonctionne pas ?

Définition et Propriété. Soient A et B deux évènements d'une expérience aléatoire, tels que $P(B) \neq 0$.
On appelle ____, ou « probabilité que A soit réalisé sachant que B est réalisé », le nombre :

$$P_B\left(A\right) = \frac{\mathrm{Card}(A \cap B)}{\mathrm{Card}(B)} = \frac{P\left(A \cap B\right)}{P\left(B\right)}$$

Exemple 3. *Inspiré du sujet d'E3C série technologique, série 2, n°49.* Une usine produit et vend de l'eau minérale en bouteilles d'un litre. L'eau provient de deux sources A et B.

Un laboratoire indépendant effectue des tests sur un stock journalier de 400 bouteilles produites par l'usine et détermine si l'eau est calcaire ou non :

- 250 bouteilles provenant de la source A ont été testées, parmi lesquelles 12 contenaient de l'eau calcaire.
- 85 % des bouteilles testées ne contenaient pas d'eau calcaire.

1. Compléter le tableau suivant :

	Source A	Source B	Total
Eau calcaire			
Eau non calcaire			
Total			400

2. On choisit au hasard une bouteille parmi le stock des 400 bouteilles testées. Toutes les bouteilles du stock ont la même probabilité d'être choisies.
   On considère les évènements :
   - $A =$ « la bouteille provient de la source A » ;
   - $B =$ « la bouteille provient de la source B » ;
   - $C =$ « l'eau contenue dans la bouteille est calcaire ».

   (a) Calculer $P(A)$.
   (b) Justifier que $P(C) = 0,15$.
   (c) Traduire par une phrase l'évènement $B \cap C$ puis calculer sa probabilité.
   (d) Calculer la probabilité que l'eau contenue dans la bouteille provienne de la source B sachant qu'elle est calcaire.

Définition. Deux évènements A et B (avec $P(B) \neq 0$) sont dits ________________ si $P_B(A) = P(A)$.

Propriété. Deux évènements A et B sont *indépendants* si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

c Répétition d'expériences aléatoires

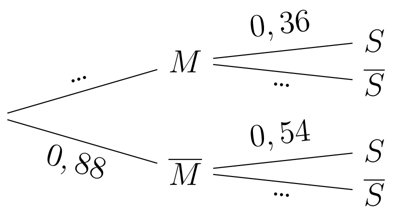
Propriété. On peut modéliser la successions d'expériences aléatoires par un arbre de probabilités (ou arbre pondéré) respectant les règles suivantes.

- La somme des probabilités des branches issues d'un nœud est égale à 1.
- Le probabilité d'une issue d'un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées sur le chemin.
- La probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités des issues qui le composent.

Exemple 4. Une pièce truquée a une probabilité $^1/_3$ de tomber sur pile. On la lance deux fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile ?

Exemple 5 (Inspiré du sujet d'E3C °44 — Mai 2020)**.** Une personne est choisie au hasard parmi les participants d'une étude scientifique. On note M l'évènement « la personne est malade » et S l'évènement « la personne a une activité sportive régulière ».
Si nécessaire, les résultats approchés seront donnés à 10^{-3} *près.*

1. Compléter l'arbre pondéré ci-contre, représentant la situation.
2. Décrire par une phrase la probabilité $P_M\left(\overline{S}\right)$, et donner sa probabilité.



3. (a) Quelle est la probabilité que la personne soit malade et qu'elle pratique une activité sportive régulièrement ?
   (b) Montrer que la probabilité que la personne pratique une activité sportive régulièrement est égale à 0,518.
4. La personne choisie a une activité sportive régulière. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit malade ?
5. Les évènements M et S sont-ils indépendants ?